



Серия №26. Квадратичные иррациональности

17 июля

Определение. Число $a + b\sqrt{d}$, где $a, b, d \in \mathbb{Q}$, а число d не является квадратом рационального числа, называют квадратичной иррациональностью. Пару чисел $t = a + b\sqrt{d}$ и $\bar{t} = a - b\sqrt{d}$ будем называть сопряжёнными друг к другу.

0. Любую квадратичную иррациональность можно домножить на ненулевое целое число так, что a, b, d будут целыми, и число d свободно от квадратов.

Задачи

1. Докажите, что любая квадратичная иррациональность с целыми a, b, d является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.
2. Является ли число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ квадратичной иррациональностью:
а) с целыми коэффициентами?
б) с рациональными коэффициентами?
3. а) Даны натуральные числа a, b и свободное от квадратов число k , где $a^2 - kb^2 = 1$. Подберите вместо звёздочек целые числа, отличные от 0, ± 1 , чтобы для любых x, y выполнялось тождество: $(*x + *y)^2 - k(*x + *y)^2 = x^2 - ky^2$.
б) Докажите, что если у уравнения $x^2 - ky^2 = 1$, где k свободно от квадратов, нашлось решение в натуральных числах, то таких решений бесконечно много.
4. Пусть a, b, k – числа из предыдущей задачи. Будем говорить, что квадратичная иррациональность $t = a + b\sqrt{k}$ является решением уравнения Пелля $x^2 - ky^2 = 1$.
а) Пусть t – решение. Чему равно $t\bar{t}$?
б) Пусть s, t – решения. Докажите, что ts и $t\bar{s}$ тоже решения.
в) Пусть $t_1 = a + b\sqrt{k}$ решение с минимально возможными натуральными a, b (такое решение называют фундаментальным). Докажите, что все целочисленные решения уравнения Пелля можно представить в виде t_1^n , где n – целое число.

Теорема. Если a, b – фундаментальное решение уравнения Пелля $x^2 - ky^2 = 1$, то все решения могут быть представлены в виде

$$x = \frac{(a + b\sqrt{k})^n + (a - b\sqrt{k})^n}{2}, y = \frac{(a + b\sqrt{k})^n - (a - b\sqrt{k})^n}{2\sqrt{k}}.$$

5. а) Пусть M, k – натуральны, k свободно от квадратов. Докажите, что найдутся натуральные x и $y < M$, такие, что $|x - y\sqrt{k}| < \frac{1}{M}$.
б) Докажите, что найдётся такое натуральное N , что неравенство $|x^2 - ky^2| < N$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
в) Докажите, что существует такое целое n и бесконечно много пар (x_i, y_i) таких, что $x_i^2 - ky_i^2 = n$ и $\forall i, j: x_i - x_j \div n, y_i - y_j \div n$.
г) Рассмотрев дробь $\frac{x_i - y_i\sqrt{k}}{x_j - y_j\sqrt{k}}$, докажите, что найдутся $x, y \in \mathbb{N}$, что $x^2 - ky^2 = 1$.
6. Докажите, что при любом натуральном n найдется такое натуральное k , что выполнено равенство $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.